

**Eesti LXXI matemaatikaolümpiaad**  
**TALLINNA KOOLIVOOR**  
**11. jaanuaril 2024. a. Tallinnas**  
**XI klass**

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tee kahe linna vahel läbib kiirrong 4 tunni võrra kiiremini kui kaubarong ja 1 tunni võrra kiiremini kui reisirong. Kaubarongi kiirus moodustab  $\frac{5}{8}$  reisirongi kiirusest ning on 50 km/h võrra väiksem kiirrongi kiirusest. Leidke rongide kiirused.
2. Lahendage võrratuste süsteem
$$\begin{cases} x^5 \geq 25x^3 \\ \frac{(5x - x^2 - 7)(x + 7)}{x^2 - 5x - 6} < 0 \end{cases}.$$
3. Olgu  $f(x; y) = (1 - \cos x \cdot \cos y)^2$  ja  $g(x; y) = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$ .
  - a) Tõestage, et võrratus  $f(x; y) \geq g(x; y)$  kehtib sõltumata reaalarvude  $x$  ja  $y$  väärtustest.
  - b) Lihtsustage avaldis  $\sqrt{f(x; y) - g(x; y)}$ .
  - c) Tooge üks näide sellistest reaalarvudest  $x$  ja  $y$ , mille korral on avaldisel  $\sqrt{f(x; y) - g(x; y)}$  suurim võimalik väärtus.
4. Rööpküliku  $ABCD$  teravnurk  $A$  on suurusega 45 kraadi. Rööpküliku küljel  $BC$  on võetud punkt  $M$  selliselt, et  $BM : MC = 2:3$  ning  $MA \perp MD$ . Leidke rööpküliku lähiskülgede pikkuste suhe.
5. Miiniotsija robot on programmeeritud liikuma ühe sammu kaupa kujuteldavas ristkoordinaadistikus ühest täisarvuliste koordinaatidega määratud punktist teise täisarvuliste koordinaatidega punkti kas piki koordinaattelgi või nendega paralleelselt. Selles koordinaadistikus on  $x$ -telg alati suunatud itta ja  $y$ -telg suunatud põhja. Esimese sammu teeb robot ida suunas ja tema iga sammu pikkus on võrdne selle ristkoordinaadistiku ühikuga. Kui robot on jõudnud mingisse punkti  $P(x; y)$ , siis toimib ta alati nii:
  - kui vahe  $x - y$  annab arvuga 4 jagamisel kas jäägi 0 või 1, pöörab robot  $90^\circ$  võrra vasakule ja teeb ühe sammu;
  - kui vahe  $x - y$  annab arvuga 4 jagamisel kas jäägi 2 või 3, pöörab robot  $90^\circ$  võrra paremale ja teeb ühe sammu.
  - a) Millisesse punkti jõuab robot 12 sammuga, kui ta alustab oma esimest sammu punktist  $A(4;0)$ ?
  - b) Millise ilmakaare suunas liigub robot kui ta teeb oma 51-st sammu?